(c) मान लो (X, d) एक दूरिक समष्टि है तथा $A \subseteq X$, सिद्ध कीजिए यदि A संबद्ध, विवृत्त और संवृत्त है, तब A, X का संबद्ध घटक है।

Let (X, d) be a metric space and $A \subseteq X$, Prove that if A is connected, open and closed, the A is component of X.

ROLL NO.....

BA3/BSM3-01/21

ANNUAL EXAMINATION, 2021

B.Sc./B.A.-III

MATHEMATICS

PAPER-I

ANALYSIS

TIME: 3 HOURS **Maximum: 50**
Minimum: 17

नोटः- प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल करो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
Note: Solve any two parts from each unit. All questions carry equal marks.

इकाई–1/Unit-1

प्र.1. (a) दर्शाइये कि, $a_{mn} \geq 0$ सहित एक द्विक श्रेणी

$$\sum_{m,n} a_{mn}$$

या तो एक परिमित योग $\propto$ की ओर अभिसरित होती है या ∞ की ओर उचित अपसरित होती है।

Show that, a double series

$$\sum_{m,n} a_{mn}$$

with $a_{mn} \geq 0$ either converges to a finite sum $\propto$ or else it diverges properly to ∞.

(b) फलन– $f(x,y) = x^2y^2 + \sin x + \cos y$

के लिए यंग प्रमेय का सत्यापन मूल बिन्दु पर कीजिए।

Verify the Young's theorem at origin for the function –

$$f(x,y) = x^2y^2 + \sin x + \cos y$$

(c) फलन

$$f(x) = \begin{cases} x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

का फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए, जबकि $f(x)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्तक 2π है।

Obtain the Fourier series of the function

$$f(x) = \begin{cases} x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

$f(x)$ being a periodic function hawing its period 2π.

इकाई–2/Unit-2

प्र.2. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एक दिष्ट फलन रीमान समाकलनीय होता है।

Prove that every monotonic function is Riemann integrable.

Let (X,d) be a complete metric space, and let (Y,d) be a subspace of (X,d) then prove that Y is complete if and only if Y is closed.

(c) सघनता प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Density theorem.

इकाई–5/Unit-5

प्र.5. (a) मान लो (X,d) तथा (Y,ρ) दो दूरीक समष्टियां है और $f: X \to Y$ एक फलन है। तब सिद्ध कीजिए कि f संतत है यदि और केवल यदि $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}, (\bar{B})$, Y के प्रत्येक उपसमुच्चय B के लिए।

Let (X,d) and (Y,ρ) be two metric spaces and $f: X \to Y$ be a function. Prove that f is continuous if and only if $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}, (\bar{B})$, Y , for every subset B of Y.

(b) सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समष्टि का एक संहत् उपसमुच्चय संवृत्त और परिबद्ध होता है।

Prove that a compact subset of a metric space is closed and bounded.

(b) यदि $ab \neq 0$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \log\left|\frac{b}{a}\right|.$$

If $ab \neq 0$, that

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \log\left|\frac{b}{a}\right|.$$

(c) यदि $\propto^2 < 1$, सिद्ध कीजिये कि

$$\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{1+\propto \sin x}{1+\propto \sin x}\right)\frac{dx}{\sin x} = \pi \cdot sin^{-1}x.$$

If $\propto^2 < 1$, prove that

$$\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{1+\propto \sin x}{1+\propto \sin x}\right)\frac{dx}{\sin x} = \pi \cdot sin^{-1}x.$$

इकाई–3/Unit-3

प्र.3. (a) यदि $u + v = \frac{2\sin 2x}{e^{2y}-e^{-2y}-2\cos 2x}$ तथा $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ का एक विश्लेषिक फलन है, $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

If $u + v = \frac{2\sin 2x}{e^{2y}-e^{-2y}-2\cos 2x}$ and $f(z) = u + iv$, is an analytic function of $z = x + iy$, find $f(z)$ interms of z.

(b) अनन्त पट्टी $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ का प्रतिबिम्ब रूपांतरण $w = \frac{1}{z}$ के अंतर्गत ज्ञात कीजिए। प्रदेश को ज्यामितीय रूप में दर्शाइये।

Find the image of the infinite strip $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ under the transformation $w = \frac{1}{z}$. Show the region geometrically.

(c) दर्शाइये कि रूपांतरण $w = (z + i)^2 = 1$, z –समतल में वृत्त $|z| = 1$ के आंतरिक भाग को परवलय $\frac{1}{R} = 2(1 - \cos\emptyset)$ (जहाँ $w = R\, e^{i\emptyset}$) के बाहरी भाग में प्रतिचित्रित करता है।

Show that the transformation $w = (z + i)^2 = 1$, maps the interior of the circle $|z| = 1$ in the z –plane of the exterior of the parabola $\frac{1}{R} = 2(1 - \cos\emptyset)$ (where $w = R\, e^{i\emptyset}$).

इकाई–4/Unit-4

प्र.4. (a) दर्शाइये कि किसी दूरीक समष्टि में, प्रत्येक विवृत्त गोलक एक विवृत्त समुच्चय होता है।

Show that in a metric space, every open sphere is an open set.

(b) मानलो (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा मानलो $(Y, d), (X, d)$ का एक उपसमष्टि है तब सिद्ध कीजिए कि Y पूर्ण होता है यदि और केवल यदि Y संवृत्त है।