(c) निम्न द्विघाती समघात को विहित रूप में व्यक्त कीजिये, तथा उसकी जाति एवं चिन्हक ज्ञात कीजिये–

$$q = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4yz + 6zx$$

Reduce to canonical form and find the rank and the signature of the quadratic form –

$$q = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4yz + 6zx$$

प्र.5. (a) आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ में सिद्ध कीजिये कि $|\alpha, \beta| \le \|\alpha\|\|\beta\|$

In an inner product vector space $V(F)$. Prove that

$|\alpha, \beta| \le \|\alpha\|\|\beta\|$

(b) यदि वास्तविक आन्तर गुणन समष्टि में α और β दो सदिश हो तथा $\|\alpha\| = \|\beta\|$ तो सिद्ध कीजिये $\alpha - \beta$ और $\alpha + \beta$ लाम्बिक होंगे।

If α *and* β are vectors in a real inner product space and $\|\alpha\| = \|\beta\|$, then prove that $\alpha - \beta$ and $\alpha + \beta$ are orthogonal.

(c) ग्राम–श्मिट के लाम्बिक प्रक्रम का उपयोग करके $V_3(R)$ के आधार $B = \{B_1, B_2, B_3\}$ से एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार ज्ञात कीजिये, जहाँ $\beta_1 = (1,0,1), \beta_2 = (1,2,-2), \beta_3 = (2,-1,1)$ हैं।

Find the orthonormal basis for $V_3(R)$ with standard inner product using Gram-Schmidt orthogonalization to the basis $B = \{B_1, B_2, B_3\}$ where

$$\beta_1 = (1,0,1), \beta_2 = (1,2,-2), \beta_3 = (2,-1,1)$$

-------xxxx-------

ROLL NO....................

BA3BSM3-02/21

ANNUAL EXAMINATION, 2021

B.Sc./B.A.-III

MATHEMATICS

PAPER-II

ABSTRACT ALGEBRA

TIME: 3 HOURS | **Maximum: 50**
Minimum: 17

नोट:- **प्रत्येक इकाई से किन्हीं दो भाग हल करो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।**

Note: **Solve any two parts from each unit. All questions carry equal marks.**

प्र.1. (a) सिद्ध कीजिये कि समूह G पर संयुग्मिता संबंध एक तुल्यता संबंध है।

Prove that, the relation of conjugacy is an equivalence relation on G.

(b) यदि समूह G का मात्र p –साइलो उपसमूह H हो, तो सिद्ध कीजिये H, G में प्रसामान्य उपसमूह होगा।

If a group G has only, p –sylow subgroup H, then prove that H is normal, subgroup in G.

(c) यदि G एक समूह है और $G, N_1, N_2 - - - N_n$ का आंतरिक अनुलोम गुणनफल है जहाँ $N_1, N_2 - - - N_n, G$ के प्रसामान्य उपसमूह हैं। यदि $T = N_1 \times N_2 \times - - - \times N_n$ तब सिद्ध कीजिये कि G और T तुल्याकारी है।

If G be a group and suppose that G is the internal direct product of $N_1, N_2 - - - N_n$, where $N_1, N_2 - - - N_n$ are normal subgroup of G. If $T = N_1 \times N_2 \times - - - \times N_n$. Then prove that G and T are isomorphic.

प्र.2. (a) सिद्ध कीजिये, एक वलय R की दो गुणजावलियाँ S और T के लिये SUT, R की गुणजावली होती है यदि और केवल यदि या तो $S \subseteq T$ या $T \subseteq S$ हो।

Prove that, S and T be two ideals of R them SUT is also an ideal of R if and only if either $S \subseteq T$ or $T \subseteq S$.

(b) निम्न बहुपदों का महत्तम सर्वमाजक ज्ञात कीजिये। जहाँ बहुपदों का क्षेत्र माड्यूलों 5 के अवशेष वर्गों का क्षेत्र है। जहाँ–

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2 \text{ और } g(x) = x^2 + 4$$

Find the greatest common division of the following polynomials over the field of residue classed modules 5. where –

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2 \; and \; g(x) = x^2 + 4$$

(c) सिद्ध कीजिये कि समाकारिता की अष्टि एक उपप्रतिरूपक है।

Prove that, the Kernnel of homorphism is a submodule.

प्र.3. (a) यदि सदिश समष्टि $V(F)$ के W_1 एवं W_2 दो सदिश उपसमष्टि हो तो सिद्ध कीजिये $L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$

If W_1 and W_2 two subspaces of vector space $V(F)$. Then prove that $L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$

(b) जाँच कीजिये कि सदिशों $(2,3,1), (-1,4,-2), (1,18,-4)$ का समुच्चय $V_3(R)$ में रैखिकतः स्वतंत्र है या परतंत्र?

Examine whether the set of vectors $(2,3,1), (-1,4,-2), (1,18,-4)$ is linearly dependent of independent in $V_3(R)$.

(c) यदि $V(F)$ एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है जिसका W_1 और W_2 दो उपसमिष्ट हैं तो सिद्ध कीजिये –

$$\text{विमाा } (W_1 + W_2) = \text{विमा } W_1 + \text{विमा } W_2 - \text{विमा } (W_1 \cap W_2)$$

If $V(F)$ be a finite dimensional vector space and W_1 and W_2 be two vector spaces of $V(F)$. Then prove that

$$dim\,(W_1 + W_2) = dim\, W_1 and\; W_2 + dim\, W_2 - dim(W_1 \cap W_2)$$

प्र.4. (a) यदि $B = \{\propto_1, \propto_2 - - - \propto_n\}$ समष्टि का आधार है, तथा पर एक रैखिक रूपांतरण है तो सिद्ध कीजिये कि $\forall \propto \in V$

$$[T: B]\,[\propto: B] = [T(\propto): B]$$

If $B = \{\propto_1, \propto_2 - - - \propto_n\}$ be a basis of V and T be a linear transformation on V. Them prove that $\forall \propto \in V$

$$[T: B]\,[\propto: B] = [T(\propto): B]$$

(b) दर्शाइये कि निम्न आव्यूह अविकर्णीय है –

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix A is not diagonalizable, where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$