

[1]

ROLL NO.....

BA2/BSM2-01/21

ANNUAL EXAMINATION, 2021

B.Sc./B.A.-II

MATHEMATICS

PAPER-I

ADVANCED CALCULUS

TIME: 3 HOURS

Maximum: 50

Minimum: 17

नोट:- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note: All questions are compulsory. Solve any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई-1/Unit-1

प्र.1. (a) कौशी का सीमा पर प्रथम प्रमेय सिद्ध करो व दर्शाओं कि –
Prove Cauchy First Theorem on limit & show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + \dots + n^{1/n} \right] = 1$$

(b) श्रेणी के तुलना-परीक्षण का केवल कथन लिखो व निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण करो –

Write only the statement of comparison test for series & test the convergence of following series-

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

[2]

- (c) सिद्ध करो कि प्रत्येक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी, अभिसारी होती हैं परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है व दर्शाओ कि निम्न श्रेणी, निरपेक्ष अभिसारी है—
Prove that every absolute convergent series. Show that the following series is absolutely convergent

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

इकाई-2/Unit-2

- प्र.2. (a) कॉशी के फलन के सातत्य की परिभाषा लिखो। निम्न फलन के सातत्य की जांच मूलबिन्दु पर करो —
Write Cauchy definition of continuity of a function. Find the continuity of following function at origin —

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

- (b) डर्बक्स के अवलोकन के मध्यवर्ती मान प्रमेय को लिखो व सिद्ध करो।
State & prove Darboux Intermediate value theorem for derivative.
- (c) टेलर के प्रमेय को कॉशी के अवशेष पदों के रूप में लिखो व सिद्ध करो।
State & prove Taylor's theorem with Cauchy form of remainder terms.

[3]

इकाई-3/Unit-3

- प्र.3. (a) दो चरों के फलन की सीमा की परिभाषा लिखो व $\epsilon - \delta$ तकनीक से सिद्ध करो कि —
Write the definition of Limit of a function of two variable by $\epsilon - \delta$ technique, show that-

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} xy = 6$$

- (b) समघात फलन पर आयरलर प्रमेय को लिखो व दर्शाओ कि —
यदि $u = \cos^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
तो $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{2} \cot u$
Write the statement of Euler's theorem on homogeneous function & show that —
If $u = \cos^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
then $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{2} \cot u$
- (c) यदि u_1, u_2, \dots, u_n कोई 'n' स्वतंत्र चरों x_1, x_2, \dots, x_n का फलन है तो दर्शाओ कि, एक सर्वसम संबंध $F(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ के लिये विद्यमान होगा। यदि और केवल यदि जेकोवियन $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0$

[5]

If u_1, u_2, \dots, u_n be functions of 'n' independent variable x_1, x_2, \dots, x_n . Then show that an identical relation between function $F(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ iff the

$$\text{Jacobian } \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0$$

इकाई-4/Unit-4

- प्र.4. (a) एनवालोप की परिभाषा लिखो व सरल रेखा कुल $y = mx + \frac{u}{m}$ का एनवालोप ज्ञात करो जहाँ 'm' प्राचल है।

Write the definition of Envelop. Find the envelope of the family of straight lines $y = mx + \frac{u}{m}$, where 'm' is parameter.

- (b) फलन $f(x, y)$ के किसी बिन्दु (a, b) पर उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ होने के आवश्यक प्रतिबंध का केवल कथन लिखो। फलन $f(x, y) = x^4 + x^2y + y^2$ के सभी उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ माँ को ज्ञात करो।

Write only the statment of the necessary condition for Maximum or minimum of the function $f(x, y)$ at point (a, b) . Find all the max & min value of $f(x, y) = x^4 + x^2y + y^2$.

[6]

- (c) $u = x^2 + y^2 + z^2$ का उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान ज्ञात करो जहाँ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$

Find the max. or min. value of $u = x^2 + y^2 + z^2$ where $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$

इकाई-5/Unit-5

- प्र.5. (a) बीटा फलन की परिभाषा लिखो। दर्शाओ कि

Write definition of Beta Function & show that

$$\beta(m, n) = \beta(m + 1, n) + \beta(m, n + 1), m, n > 0$$

- (b) मूल्यांकन करो

$$\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$$

जहाँ क्षेत्र V परिबद्ध है $-x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0$

Evaluate

$$\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$$

where region V is bounded by -

$$x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0$$

- (c) समाकलन के क्रम का परिवर्तन करो-

Change the order of Integration -

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} V dx dy$$

-----XXX-----